MAI 1 – 1) ještě několik řešených příkladů výpočtu neurčitých integrálů (ke cvičení 11) (stručněji, a s „obvyklým" zápisem výpočtu)

2) na závěr (ke cvičení 11) – několik „příkladů" vyšetřování existence primitivních funkcí

1) příklady (jednoduché) vhodných substitucí, které „vedou" k integraci racionální funkce:

1. $$\underbrace{\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}}_{x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\ (2\,VS)} \overset{}{=}_{VS} \left| \begin{array}{l} e^x = t\ ,\ t\neq 1\ (t>0) \\ x = \ln t\ (\equiv \varphi(t)) \\ dx = \frac{1}{t}dt\ \left(\varphi'(t)=\frac{1}{t}\right) \end{array} \right| =$$

a odtud: $t\neq 1 \Leftrightarrow e^x\neq 1$, tj. $x\neq 0$

$$= \int \frac{1}{(t^2+t-2)\cdot t}\,dt = \int \frac{1}{(t+2)(t-1)\cdot t}\,dt =$$ rozklad na parciální zlomky

$$= -\frac{1}{6}\int\frac{1}{t+2}dt + \frac{1}{3}\int\frac{1}{t-1}dt - \frac{1}{2}\int\frac{1}{t}dt =$$

$$= -\frac{1}{6}\ln|t+2| + \frac{1}{3}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t| + C \overset{\text{(„zpět" } t=e^x)}{=}$$

$$= \underline{-\frac{1}{6}\ln(e^x+2) + \frac{1}{3}\ln|e^x-1| - \frac{1}{2}x + C,\quad C\in R,\ x\neq 0}$$

① rozklad dané funkce na parciální zlomky:

$$\frac{1}{(t+2)(t-1)\cdot t} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t}$$ pro $t\neq 0,1,-2$, a odtud

$$1 = At(t-1) + Bt(t+2) + C(t+2)(t-1)$$ – platí (i pro $t=0,1,-2$ (díky spojitosti polynomů))

a tak lze dosadit kořeny:

$t=0$: $-2C = 1 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$

$t=1$: $3B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{3}$

$t=-2$: $-6A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{6}$

2. $$\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx \underset{\text{VS („opačná")}}{=} \left|\begin{array}{l} \sqrt[4]{x}=t \quad x\in(0,+\infty),\ t\in(0,+\infty) \\ x=t^4\ (\equiv \varphi(t)) \\ dx=4t^3dt \quad (\text{nebo } \varphi'(t)=4t^3) \end{array}\right| =$$

$x\in(0,+\infty)$

$$= \int \frac{1+t}{t^4+t^2}\cdot 4t^3dt = 4\int \frac{(1+t)t}{t^2+1}dt = 4\int \frac{(t^2+1)+(t-1)}{t^2+1}dt =$$

$$= 4\int\left(1+\frac{t}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt = 4\left(\int dt + \frac{1}{2}\int\frac{2t}{t^2+1}dt - \int\frac{1}{t^2+1}dt\right) =$$

$$= 4\left(t+\frac{1}{2}\ln(t^2+1)-\operatorname{arctg} t\right)+C \underset{(\text{„zpět"}\ t=\sqrt[4]{x})}{=}$$

$$= \underline{4\left(\sqrt[4]{x}+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x}+1)-\operatorname{arctg}(\sqrt[4]{x})\right)+C}, \quad x\in(0,+\infty),\ C\in\mathbb{R}$$

3. $$\int \frac{1}{(2+\cos x)\cdot\sin x}\,dx$$ – integrovaná funkce („integrand") je funkce „lichá v „sinu", tedy lze dle doporučení užít substituce $\cos x = t\ (\equiv g(x))$, pak $-\sin x = g'(x)$:

$x\in(k\pi,(k+1)\pi),\ k\in\mathbb{Z}$

$$\int\frac{1}{(2+\cos x)\sin x}dx = \int\frac{1}{(2+\cos x)\sin^2 x}\cdot\sin x\,dx \underset{(\sin^2x=1-\cos^2x)}{=}$$

$$= \int\frac{1}{(2+\cos x)(\cos^2x-1)}(-\sin x)\,dx \underset{\text{VS}}{=} \left|\begin{array}{l}\cos x=t\ (\equiv g(x)) \\ -\sin x\,dx=dt \quad (g'(x)=-\sin x)\end{array}\right|$$

$$= \int\frac{1}{(t+2)(t^2-1)}dt \underset{\text{rozklad na parciální zlomky}}{\overset{(*)}{=}} A\int\frac{1}{t+2}dt + B\int\frac{1}{t-1}dt + C\int\frac{1}{t+1}dt =$$

$$= A\ln|t+2| + B\ln|t-1| + C\ln|t+1| + K \overset{(t=\cos x)}{=}$$

$$= A\ln|\cos x+2| + B\ln|\cos x-1| + C\ln|\cos x+1| + K$$

A rozklad (*) na parciální zlomky:

$$\frac{1}{(t+2)(t^2-1)} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t+1}, \quad t \neq 2, \pm 1, \text{ a odtud}$$

$$1 = A(t^2-1) + B(t+2)(t+1) + C(t+2)(t-1)$$

a lze opět dosadit třeba:

$t=1$: $6B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{6}$

$t=-1$: $-2C = 1 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$, tedy

$t=2$: $3A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$

$$\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,dx = \frac{1}{3}\ln(\cos x+2) + \frac{1}{6}\ln|\cos x-1| - \frac{1}{2}\ln|\cos x+1| + C,$$

$$C \in \mathbb{R},\quad x \in (k\pi, (k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx$ – integrand je funkce spojitá v R, tedy má v R primitivní funkci – ale !

fce $\dfrac{1}{1+\sin^2 x}$ je „sudá" v sinu, tedy doporučená substituce (a racionální v sinu)

je $\operatorname{tg} x = t$, ale pokud tuto substituci užijeme, budeme mít primitivní funkci jen v intervalech $\left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$, takže budeme „muset" zde primitivní funkci „dodefinovat" v bodech $x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$! A jak ? Tak, aby byla v bodech $x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ spojitá (primitivní fce F k f v (a,b) je spojitá, neboť má vlastní derivaci – $F'(x) = f(x)$ v (a,b)) – a to je zde „nové" v tomto příkladu.

a „spočítáme-li" primitivní funkci $F(x)$ v „základním" intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $(k=0)$, kde má fce $\operatorname{tg} x$ funkci inversní arctg – potom systém funkcí $F(x)+c$, $c \in R$ bude též množina primitivních funkcí k $\frac{1}{1+\sin^2 x}$ díky π-periodicitě dané funkce – a v bodech $x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ pak dodefinujeme spojité primitivní funkce, které budeme mít „vypočítané" v otevřených intervalech $\left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ vhodnou volbou konstant.

Tedy zkusme: řešme $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $(= \mathcal{J}_0)$

$$\int \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ x = \operatorname{arctg} t \equiv g(t),\ t \in R \\ dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt \ \left(\text{neboť } g'(t) = \frac{1}{1+t^2}\right) \end{array} \right| =$$

$$\left(= (\overset{?}{=}) \text{ – jistě „chybí" vyjádření } \sin^2 x \text{ pomocí fce } \operatorname{tg} x! \quad \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} \text{ pro } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \right) =$$

$$\text{tj. } \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \Bigg)$$

$$\overset{VS}{=} \int \frac{1}{1+\frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{1+(\sqrt{2}t)^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t) + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C_0,$$

(„zpět: $t = \operatorname{tg} x$)

$C_0 \in R$

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

a nyní (z π-periodicity fce $\frac{1}{1+\sin^2 x}$) už víme, že pro $x \in \mathcal{I}_k = \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \right)$ je

$$\int \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,\operatorname{tg} x) + c_k\,,\quad c_k \in \mathbb{R}$$

<u>A jak dodefinovat primitivní funkci v bodech $x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$?</u>

<u>Ukážeme pro $x_0 = \frac{\pi}{2}$</u> (a pak už v dalších bodech $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ si to jistě „snadno" představíte)

<u>Vezmeme:</u> $F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,\operatorname{tg} x)$, tj. $c_0 = 0$ (zvolme), $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

a $F_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,\operatorname{tg} x) + c_1$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

? hledáme c_1 tak, aby $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-} F_0(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+} F_1(x)$ a pak touto limitou dodefinujeme primitivní funkci v bodě $x = \frac{\pi}{2}$ – – dle existenční věty to „musí jít" – tj. limita „musí být vlastní a navíc, po dodefinování „musí" existovat i derivace dodefinované $F(x)$ v bodě $x_0 = \frac{\pi}{2}$ (toto už tedy nemusíme ověřovat)

a $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-} F_0(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\underbrace{\sqrt{2}\,\operatorname{tg} x}_{\to +\infty}) \underset{\text{VLSF}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+} F_1(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\underbrace{\sqrt{2}\,\operatorname{tg} x}_{\to -\infty}) + c_1 \underset{\text{VLSF}}{=} -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2} + c_1$

tedy: $\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2} + c_1$, odkud $\underline{c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\pi}$ $\left(= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right)$

Tedy, primitivní funkce $F(x)$ v $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ je definována:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,\operatorname{tg} x) + c, & x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2} + c, & x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,\operatorname{tg} x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\pi + c \end{cases}$$

A nyní má je „zřejmé", že je-li $C_0 = 0$, pak v bodě $x_1 = \frac{3\pi}{2}$

bude
$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}-} F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\pi \\ a \quad &\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}+} F(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2} + C_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_2 = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\pi \,,$$

a dále má „vidíte".

To byl trochu „náročnější" příklad, ale snad je tomu „rozumět" – ukážeme si toto „lepení" primitivních funkcí na příkladech „jednodušších" (asi jsme tím měli začít – ale chtěla jsem nejprve ukázat, že při takovém obvyklém příkladu se přes doporučené (všude) substituci, se nelze vyhnout „problému".

A teď jistě v jednodušší podobě:

1. Je dána funkce $f(x) = -x^2$, $x \in (-\infty, 0\rangle$ a
$f(x) = \sin x$, $x \in (0, +\infty)$;

f je fce spojitá v R, tedy má v R primitivní funkci, ale je jasné, že z „tabulky" primitivních funkcí dostaneme:

$F_1(x) = -\frac{x^3}{3} + C_1$ – primitivní funkce v $(-\infty, 0)$ a

$F_2(x) = -\cos x + C_2$ – primitivní funkce v $(0, +\infty)$

Tedy „chybí" hodnota v bodě $x=0$, a zde je třeba funkci $F(x)$ dodefinovat – a to spojitě, tj: $\lim\limits_{x\to 0-} F_1(x) = \lim\limits_{x\to 0+} F_2(x) = F(0)$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0-} F_1(x) &= \lim_{x\to 0-}\left(-\frac{x^3}{3}+c_1\right) = c_1 \\ \lim_{x\to 0+} F_2(x) &= \lim_{x\to 0+}\left(-\cos x + c_2\right) = c_2 - 1 \end{aligned}\right\} = ?$$

$$\lim_{x\to 0-} F_1(x) = \lim_{x\to 0+} F_2(x) \iff c_1 = c_2 - 1 \Rightarrow c_2 = c_1 + 1$$

tedy:
$$\begin{cases} F(x) = -\frac{x^3}{3} + c, & x \in (-\infty, 0) \\ F(0) = c \\ F(x) = -\cos x + c + 1, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

(a existenci $F'(0)$ už ověřovat po „slepení" $F_1(x)$ a $F_2(x)$ v $x=0$ nemusíme, ale můžeme se podívat":

$$\left.\begin{aligned} F'_-(0) &= \lim_{x\to 0-} F'(x) = \lim_{x\to 0-} x^2 = 0 \quad (\text{díky spojitosti } F) \\ \text{a} \quad F'_+(0) &= \lim_{x\to 0+} F'(x) = \lim_{x\to 0+} \sin x = 0 \end{aligned}\right) = !$$

tj. ex. $F'(0) = 0$)

(2) Důležitá věta: f je spojitá v $(a,b) \Rightarrow f$ má v (a,b) primitivní funkci

ale je „dobré" vědět (a mít příklad), že i funkce nespojitá v (a,b) může mít primitivní funkci – jeden příklad byl na přednášce, ukážeme si ještě jeden (podobný)

Když jsme „počítali" derivace funkce, měli jsme funkci

$$F(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ pro } x \neq 0$$
$$F(0) = 0$$

pak $F'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ pro $x \neq 0$

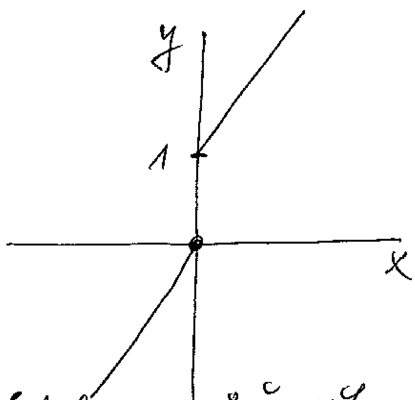
a $F'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ (VOS)

tedy $F'(0)$ existuje, ale $\lim\limits_{x \to 0} F'(x)$ neexistuje !

A odtud příklad:

vezmeme-li „obrácené": $\begin{cases} f(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ pro } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$,

pak f není spojitá v R (v žádném intervalu, který obsahuje 0)
ale funkce $F(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$ a $F(0) = 0$ je v R
fce primitivní k $f(x)$.



(3) Ale: $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (-1, 0\rangle \\ 2x+1, & x \in (0, 1) \end{cases}$

primitivní funkci nemá v $(-1,1)$ –

– f nemá v $(-1,1)$ Darbouxovu vlastnost (tedy nemůže mít fci primitivní v $(-1,1)$)

„a pokus": primitivní $F(x) = x^2 + C_1$ v $(-1, 0)$

$F(x) = x^2 + x + C_2$ v $(0, 1)$

a $\lim\limits_{x \to 0-} F(x) = C_1 \overset{(?)}{=} \lim\limits_{x \to 0+} F(x) = C_2$ tj: F lze spojitě dodefinovat

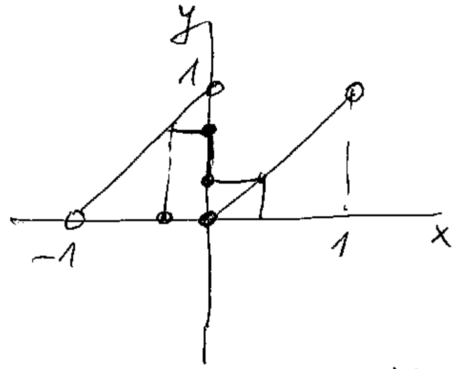
v bodě $x = 0$: $F(0) = C$ $(= C_1 = C_2)$, ale $F'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0-} F'(x) = 0$,

a $F'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0+} F'(x) = 1$ $\Big\} \neq 0$!

tedy, kdyby $F(x) = \begin{cases} x^2+C, & x \in (-1,0\rangle \\ x^2+x+C, & x \in (0,1) \end{cases}$, pak

$F(x)$ nemá v $x=0$ derivaci, tedy není primitivní fcí k $f(x)$ v $(-1,1)$!

(4) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{pro } x \in (-1,1) \\ x & \text{pro } x \in (-1,0\rangle \end{cases}$



pak $f(-1,1) = \langle 0,1)$, tj. obraz intervalu při zobrazení f je interval, ale f opět nemá v $(-1,1)$ Darbouxovu vlastnost !

- vezmeme-li $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, pak obraz $f(\langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\rangle)$ je $\langle \frac{2}{3}, 1) \cup \langle 0, \frac{1}{3})$ – a hodnoty z intervalu $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ nejsou nabývány v intervalu $\langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\rangle$!

- opět primitivní funkce k f v $(-1,1)$ neexistuje:

v $(-1,0)$ by byla $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + C_1$

$(0,1)$ by byla $F(x) = \frac{x^2}{2} + C_2$

a dodefinovat spojitě by pak znamenalo $C_1 = C_2 = C$, $F(0) = C$;

ale opět: $F'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0+} F'(x) = \lim\limits_{x \to 0+} x = 0$

a $F'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0-} F'(x) = \lim\limits_{x \to 0-} (x+1) = 1$

$\Big\} \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ F nemá v bodě $x=0$ derivaci, tj. F není primit. fce k f v $(-1,1)$!

A poslední příklad:

(5) Opět důležitá věta o existenci primitivní fce (podmínka nutná):

f má v (a,b) primitivní funkci $\Rightarrow$ f má v (a,b) Darbouxovu vlastnost

Ale opět – Darbouxova vlastnost fce f není podmínka postačující pro existenci primitivní fce k f v (a,b):

Příklad:

vezměme funkci $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$;

f je spojitá v $(0,+\infty)$ i v $(-\infty,0)$, je lichá v $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;

ze spojitosti f na $(0,+\infty)$ plyne, že $f((0,+\infty)) = \mathcal{J}$ – interval;

a vezmeme-li $\{x_n\} \ni x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, je $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$

a $\{\tilde{x}_n\}$, $\tilde{x}_n = \dfrac{1}{\frac{3\pi}{2}+2n\pi}$, je $\lim\limits_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n) = -\infty$,

tedy $\mathcal{J} = f((0,+\infty)) = R$, tedy f má v R Darbouxovu
(a i $f((-\infty,0)) = R$), ale primitivní fci v R f nemá:

v $(0,+\infty)$: $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx = \cos\left(\frac{1}{x}\right) + C = F(x) + C$, ale
i v $(-\infty,0)$

fce $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ nemá limitu v bodě $x=0$, tedy nelze fci $F(x)+C$ v bodě 0 spojitě dodefinovat.